Institut National de Statistique
Et d'Economie Appliquée
I.N.S.E.A - Rabat

INSEA

Concours d'Accès en Deuxième Année
Cycle des Ingénieurs d'Etat
2012-2013

Date : **17-07-2012** Epreuve : **Statistique** Durée : 1 H 30 mn

Exercice 1. (7 points)

Une association de consommateurs a lancé une étude pour mesurer l'impact du cours du pétrole brut sur le prix de l'Essence et du Diesel à la pompe dans les stations de service. Cette étude devrait faciliter le choix du carburant qu'un acheteur potentiel de véhicule automobile va privilégier. Pour cela il a rassemblé les informations suivantes pour l'année 2009 à savoir le prix du pétrole brut (en dollar par baril) et les prix de l'Essence et du Diesel (en Euros par litre).

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12

	Jan	Fév	Mar	Avril	Mai	Juin	Juill	Août	Sept	Oct	Nov	Déc
X **pétrole brut ($/b)**	85	95	105	115	125	135	130	110	90	93	98	103
Y **l'Essence (€/l)**	1,3	1,4	1,3	1,4	1,5	1,55	1,5	1,41	1,31	1,33	1,35	1,38
Z **Diesel (€/l)**	1,15	1,25	1,3	1,35	1,45	1,55	1,49	1,34	1,19	1,21	1,25	1,29

On note :

X = Prix du Baril de Pétrole Brut
Y = Prix de l'Essence (€/l)
Z = Prix du Diesel (€/l)

$\frac{(X-\bar{X})(Z-\bar{Z})}{(X-\bar{X})^2}$

1) Donnez l'équation de la droite des moindres carrés Y = a X + b (**1 point**)
2) Donnez l'équation de la droite des moindres carrés Z = c X + d (**1 point**)
3) Quel est le carburant le plus sensible à la variation du Prix du pétrole brut (**ESSENCE ou Diesel**) ? (**1 point**)
4) Donnez le coefficient de détermination ρ^2_{XY} (**1 point**)
5) Donnez le coefficient de détermination ρ^2_{XZ} (**1 point**)
6) Quel est l'ajustement le plus adéquat parmi les deux ? (le **Premier** ou le **Second**) (**1point**)
7) Si de manière raisonnée il est plus avantageux pour un propriétaire de voiture Essence de prendre les transports en commun lorsque le prix au litre dépasserait les 2 €. A partir de quel cours du pétrole brut, devrait-il s'apprêter à vendre sa voiture ? (**1 point**) ?

Exercice 2. (6 points)

Soit (X, Y) un vecteur aléatoire de densité :

$$f_{x,y}(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{x^2y^2} & \text{si } x\geq 1 \text{ et } y\geq 1\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$$

Soit $U = XY$ et $V = \dfrac{X}{Y}$

1. Déterminer le domaine du vecteur aléatoire (U, V). (**1 point**)
2. Déterminer la fonction de densité du vecteur (U, V). (**2 points**)
3. Déterminer les densités marginales des variables aléatoires U et V. (**2 points**)
4. Calculer $E(V)$. (**1 point**) ?

Exercice 3. (7 points)

Soit X1, X2,…, Xn un échantillon aléatoire de taille n provenant de la loi dont la fonction de densité est donnée par :

$$f_\theta(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\theta}X^{(1-\theta)/\theta} & , \text{ si } 0<x<1 \text{ et } \theta>0\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$$

avec θ un paramètre inconnu.

1) Déterminer la fonction de densité de la variable Y= - ln(X) (1 point)
2) Déterminer l'estimateur du maximum de vraisemblance $\hat{\theta}_{MV}$ de θ (1 point)
3) Quelle est la distribution de la variable aléatoire $\dfrac{2n\hat{\theta}_{MV}}{\theta}$ (1 point)
4) L'estimateur $\hat{\theta}_{MV}$ est-il sans biais ? convergent ? (2 point)
5) a) Calculer une estimation $\hat{\theta}_{MV}$ de θ lorsqu'un échantillon de taille n = 36 donne une réalisation observée telle que $\sum_{1}^{36}\ln(x_i) = -48$. (1 point).
6) Tester au seuil $\alpha = 5\%$ l'hypothèse $H_0 : \theta = 1$ contre $H_1 : \theta \neq 1$. (1 point)